М. А. Лапшина

Самара, marijalapshina@rambler.ru

ФРЕЙМЫ ГАБОРА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть вектор $g = (g(0), g(1), \ldots, g(N-1)) \in \mathbb{C}^N$, $K \geqslant N$, T — *оператор циклического сдвига* в $\mathbb{C}^N$, т. е.

$$Tg = T\,(g(0), g(1), \ldots, g(N-1)) = \\ = (g(N-1), g(0), g(1), \ldots, g(N-2)).$$

Определение 1. *Пусть* $g = (g(0), g(1), \ldots, g(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. *Для* $m = 0, 1, \ldots, N-1$ *определим*

$$\hat{g}(m) = \sum_{j=0}^{N-1} g(j) e^{-2\pi i m j/N};$$

вектор $\hat{g} = (\hat{g}(0), \hat{g}(1), \ldots, \hat{g}(N-1))$ *называется дискретным преобразованием Фурье.*

Утверждение 1. *Система векторов* $\{T^k g\}_{k=0}^{N-1}$ *образует базис в* $\mathbb{C}^N$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{g}(m) \neq 0$ *для* $m = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть M — *оператор модуляции* в $\mathbb{C}^N$, определенный равенством

$$Mg = M\,(g(0), g(1), \ldots, g(N-1)) = \\ = \left(\omega^0 g(0), \omega^1 g(1), \ldots, \omega^{N-1} g(N-1)\right),$$

где $\omega = e^{2\pi i/N}$.

Утверждение 2. *Система векторов* $\{M^l g\}_{l=0}^{N-1}$ *образует (ортонормированный) базис в* $\mathbb{C}^N$ *тогда и только тогда, когда* $g(j) \neq 0$ $(g(j) = 1/\sqrt{N})$ *для* $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Определение 2. *Набор элементов* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{K}$ *из* $\mathbb{C}^N$ *называется жестким фреймом для пространства* $\mathbb{C}^N$, *если существует положительное число* A, *такое, что*

$$\sum_{j=1}^{K} |<x, \varphi_j>|^2 = A\|x\|^2$$

для всех x *из* $\mathbb{C}^N$.

Определение 3. *Фрейм* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{K}$ *называется равномерным, если существует число* α, *такое, что* $\|\varphi_j\| = \alpha$ *для любого* $j = 1, \ldots, K$.

Определение 4. *Система Габора в* $\mathbb{C}^N$ *— это система векторов вида* $\{M^l T^k g\}$, *где* $(l, k) \in \Lambda \subset \mathbb{Z}_N^2$, $\mathbb{Z}_N$ *— класс вычетов по* $mod\, N$.

Теорема. *Для каждого вектора* $g \neq 0$ *из* $\mathbb{C}^N$ *полная система Габора* $\{M^l T^k g\}$ *с* $\Lambda = \mathbb{Z}_N^2$ *образует равномерный жесткий фрейм с фреймовой границей* $N\|g\|^2$.

Построены также фреймы Габора с $\Lambda \neq \mathbb{Z}_N^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawrence J., Pfander G., Walnut D. *Linear independence of Gabor systems in finite dimensional vector spaces* // J. Four. Anal. Appl. – 2005. – No 11. – P. 715 – 726.

2. Casazza P. G., Leonhard N. *Classes of finite equal norm Parseval frames* // Contemp. Math. – 2008. – V. 451. – P. 11–31.